ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 4

3 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

С информационной точки зрения системы управления состоят из отдельных подсистем, связанных между собой сигналами, поэтому рассмотрим математическое описание сигналов и систем. Мы будем рассматривать детерминированные сигналы и линейные стационарные системы с сосредоточенными параметрами. Методы описания дискретных цифровых систем во многом схожи и основываются на методах для непрерывных сигналов и систем, поэтому мы вспомним и углубим понимание непрерывных методов и на их основе рассмотрим описание дискретных сигналов и систем.

3.1 Описание непрерывных сигналов

Мы рассматриваем сигналы, как функции времени $x = f(t)$, иная запись $x = x(t)$. Как анализировать сигналы? Изменения сигналов носят хаотичный характер, каждый раз сигнал другой. Нам же требуется выявить скрытую информацию в сигналах, отделив информационные эффекты от помех. В сигналах может быть скрыто много информации. Простой пример: если записать наш разговор во времени, то его график будет представлен, как хаотично изменяющийся сигнал. Но мы, слушая этот сигнал, воспринимаем слова и извлекаем из разговора массу информации. Один из способов анализа сигналов – представление сигнала, как результат прохождения сигнала стандартного вида (например, белого шума) через динамическую систему определенного вида (фильтр). Подбирая параметры фильтра так, чтобы сигнал с выхода фильтра соответствовал в определенном смысле данному сигналу, мы перекладываем информационные свойства сигнала на параметры фильтра, тем самым мы анализируем сигнал. Эти методы называются параметрическими, так как мы подбираем параметры фильтра. Параметрические методы имеют широкое применение, однако мы их рассматривать не будем.

Мы рассмотрим другой метод анализа – разложение сигнала на сумму системы функций. Он получил название: спектральный метод. Метод находит очень широкое применение и заключается в следующем: выбирается система функций, свойства которых известны и смотрят, есть ли эти функции в составе исследуемого сигнала. Если есть, то в какой мере? Тем самым информация из сигнала трансформируется (переносится) в экономную (сжатую) информацию системы функций. По этим данным, зная свойства функций, извлекается информация из сигналов. Рассмотрим коротко этот метод. В спектральном методе, как уже говорилось, сигнал представляется в виде суммы известных функций, то есть в виде ряда

$$x(t) = A_0 \cdot \varphi_0(t) + A_1 \cdot \varphi_1(t) + ... + A_i \cdot \varphi_i(t) + ... = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot \varphi_i(t) \qquad (3.1)$$

Здесь $x(t)$ – анализируемый сигнал; A_i – коэффициенты, выражающие амплитуды функций ряда, которые зависят от вида сигналов; φ_i – функции, не зависящие от сигнала, но свойства которых известны. Коэффициенты находят осреднением произведения исходной функции и функции φ_i в течение времени T. Из математики известно, что практически любую функцию можно представить в виде ряда (3.1), или, говорят, функцию можно разложить в ряд. Это значит, что ряд будет с достаточно малой погрешностью повторять функцию $x(t)$. Теперь свойства функции выражены через свойства ряда (3.1), то есть ряд отражает свойства функции. Но свойства ряда складываются из известных свойств функций φ_i и амплитуд A_i, определяемых сигналом

$x(t)$. Таким образом, свойства функции переносятся на амплитуды A_i.Такой прием выражения свойств функции через амплитуды слагаемых функций ряда оказался очень продуктивным при исследовании сигналов, он называется «спектральный анализ».

Итак: *при исследовании сигналов спектральным методом их представляют в виде суммы ряда функций, при этом свойства сигналов переносятся на параметры слагаемых функций*.

Наибольшее применение для периодических сигналов нашли ряды Фурье. В этих рядах в качестве функций φ_i используются тригонометрические функции синус и косинус. Есть несколько форм ряда Фурье: синусно-косинусная форма, вещественная форма и комплексная форма В вещественной форме ряд Фурье имеет следующий вид

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)) \ . \tag{3.2}$$

Здесь $\omega_1 = 2\pi/T$ - основная круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала *T*. Частоты $k\omega_1$, кратные ω_1 , входящие в формулу (3.2), называются гармониками.

Итак: *частоты* $k\omega_1$ *называются гармониками основной частоты* ω_1.

Коэффициенты a_k, b_k рассчитываются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot\cos(k\omega_1 t)\cdot dt \ , \tag{3.3}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot\sin(k\omega_1 t)\cdot dt \ , \tag{3.4}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot dt \ . \tag{3.5}$$

Если $x(t)$ является *четной* функцией, то все b_k будут равны нулю и в формуле (3.2) будут только *косинусные* слагаемые. Если $x(t)$ будет *нечетной* функцией, то все a_k будут равны нулю и в формуле (3.2) останутся только *синусные* слагаемые.

Наибольшее применение имеет комплексная форма ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t} \ , \tag{3.6}$$

где $\dot{A}_k$ – комплексный коэффициент ряда (точка означает, что число – комплексное); $\omega_1 = 2\pi/T$ – по-прежнему основная круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала *T*; j – мнимая единица; k – номер гармоники ряда. Комплексная форма появляется из синусов и косинусов при применении формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j\sin x$ следующим образом. Можно записать $e^{jx} + e^{-jx} = \cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x = 2\cos x$, откуда $\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$. Из последней формулы видно, как появляется из действительного косинуса комплексные числа.

Коэффициенты ряда $\dot{A}_k$ находятся осреднением по формуле

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{-jk\omega_1 t}dt \ . \tag{3.7}$$

Совокупность модулей $\left|\dot{A}_k\right|$ называется амплитудным линейчатым спектром, совокупность фаз φ_k – фазовым линейчатым спектром сигнала. Эти спектры полностью характеризуют сигнал в удобном для исследования виде.

Для непериодических сигналов используют преобразование Фурье, которое получается из формулы для коэффициентов ряда Фурье (3.7) устремлением периода сигнала к бесконечности и отбрасывания множителя $\frac{1}{T}$. В итоге получается формула:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \ . \tag{3.8}$$

При этом линейчатый спектр превращается в непрерывный, обозначается $\dot{S}(\omega)$ и называется спектральной функцией, или спектром непрерывного сигнала. Спектр полностью характеризует исходный сигнал $x(t)$.

Преобразование Фурье обладает следующими свойствами:

1) Линейность. *Для преобразования Фурье справедлив принцип суперпозиции.*

2) Задержка. *При задержке сигнала на τ комплексный спектр умножается на комплексную экспоненту* $e^{-j\omega\tau}$, то есть если $x(t) = x_1(t-\tau)$, то $\dot{S}_x(\omega) = \dot{S}_{x1}(\omega)e^{-j\omega\tau}$.

3) Спектр свертки сигналов. Свертка сигналов широко используется, например, она описывает прохождение сигналов через линейную систему. Более подробно мы будем ее использовать дальше. Итак, свертка двух сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ записывается в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\cdot d\tau \, .$$

Для нахождения спектра подвергнем правую и левую части преобразованию Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\cdot d\tau\right)e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)\cdot e^{-j\omega(t-\tau)}d(t-\tau)\cdot d\tau = \dot{S}_1(\omega)\cdot\dot{S}_2(\omega)$$

или $\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \cdot \dot{S}_2(\omega)$.

Здесь использовано преобразование $e^{-j\omega t} = e^{-j\omega(t-\tau+\tau)} = e^{-j\omega\tau} \cdot e^{-j\omega(t-\tau)}$. Далее $e^{-j\omega\tau}$, как множитель, не зависящий от *t*, внесен в скобки и изменен порядок интегрирования по *t* и τ (внутренний интеграл сходится по τ).

Итак, *спектр свертки сигналов равен произведению спектров этих сигналов*.

4) Дифференцирование сигнала.

Если $x(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt}$, то, применяя к правой и левой части преобразование Фурье, можно получить $\dot{S}(\omega) = j\omega \cdot \dot{S}_1(\omega)$. Таким образом, *спектр производной от сигнала соответствует умножению спектра сигнала на jω*.

Эти свойства достаточно просто доказываются, этого мы делать не будем.

Ограничением для применения преобразования Фурье является то, что его можно использовать для абсолютно интегрируемых сигналов, то есть сигналов, которые со временем затухают (зануляются). Это существенное ограничение снимается следующим образом. Для того чтобы подынтегральное выражение затухало, функцию исходного сигнала умножают на затухающую со временем функцию $e^{-\sigma t}$, где σ – положительное число. В итоге вместо (3.8) получаем

$$\dot{S}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma t + j\omega t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt, \tag{3.8a}$$

где $s = \sigma + j\omega$.

Это преобразование называется преобразование Лапласа. В этом преобразовании мнимая угловая частота $j\omega$ в преобразовании Фурье заменяется комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$, которую можно рассматривать, как комплексную частоту. Запишем еще раз:

$$x(s) = L\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \ . \tag{3.9}$$

Преобразование Лапласа обладает теми же свойствами, что и преобразование Фурье. В частности, если $x(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt}$, то $x(s) = s \cdot x_1(s)$.

Во всех рассмотренных методах сохраняется общая идея анализа сигналов – разложение сигнала на систему функций и перенос информативных признаков сигнала на параметры этих функций в наглядном виде. При этом мы переходим из временной области в частотную область, где анализ параметров проще и нагляднее. Переменную преобразования Лапласа можно считать комплексной частотой. Эта идея сохраняется и используется в частотных методах анализа систем.